ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 56, No. 3, 1986

SUR LES SUITES PRESQUE ECHANGEABLES DANS L^q, $1 \leqq q < 2$

PAR
SYLVIE GUERRE
Equipe d'Analyse, Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT

Let $1 \leqq q < p < 2$. We construct a bounded sequence $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in L_q which defines a type σ on L_q, such that:

(i) $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is equivalent to the unit vector basis of l_p.

(ii) The 1-conic class $K_1(\sigma)$ generated by σ is not relatively compact for the topology of uniform convergence on bounded sets of L_q.

(iii) $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ has no almost exchangeable subsequence after any change of density.

This sequence does not verify the two natural conditions in L_q-spaces that ensure the existence of an almost symmetric subsequence.

Introduction

Rappelons le théorème de J. L. Krivine et B. Maurey [13] qui a généralisé un théorème de D. Aldous [1] sur les sous-espaces de L^1:

"Soit X un espace de Banach stable; il existe un réel $p \in [1, +\infty[$ et un sous espace de X, presque isométrique à l^p".

Plus précisément, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée, faiblement convergente vers 0 dans un espace de Banach stable X, alors il existe une suite de blocs normalisés $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est presque équivalente à la base canonique de l^p; en particulier, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est presque symétrique. Les espace L^q pour $1 \leqq q < +\infty$ sont stables et par conséquent ils vérifient cette propriété. On peut même préciser ce résultat dans ces espaces: la suite de blocs obtenue $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est presque échangeable après un changement de densité sur l'espace (cf. [1] et [3]).

L'outil essentiel d'étude des espaces stables est le type. Or les types sur les espaces L^q, $1 \leqq q < +\infty$, admettent une repésentation fonctionnelle explicite (cf. [7]). Ceci a permis dans [7] d'étendre les résultats précédents de la façon

Received October 8, 1985 and in revised form July 23, 1986

suivante:

> "Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée, faiblement convergente vers 0 dans L^q $(1\leqq q<+\infty)$. Si $q>2$ ou si $1\leqq q<2$ et si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite presque symétrique".

Le cas $q=1$ est dû à H. P. Rosenthal et le cas $q\in 2\mathbf{N}$ figure dans [11].

Ici, on conjecture qu'il existe des suites faiblement convergentes vers 0 dans L^q pour $1\leqq q<2$, sans sous-suite presque symétrique.

La méthode employée dans [7] pour montrer l'existence de sous-suites presque symétriques dans les cas cités ci-dessus utilise la condition suivante due à J. L. Krivine et B. Maurey:

> "Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'un espace stable X, définissant un type σ dont la 1-classe conique est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X, alors $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite presque symétrique $(X_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$. De plus, toute suite faiblement convergente vers 0 dans l'espace vectoriel engendré par $(X_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ a également une sous-suite presque symétrique".

On montre dans [7] que si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2 dans L^q, $1\leqq q<+\infty$, la 1-classe conique de tout type défini par $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^q.

Dans cet article, pour $1\leqq q<p<2$, on construit une suite de L^q, équivalente à la base canonique de l^p et définissant un type σ dont la 1-classe conique n'est pas relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^q. On vérifie que cette suite n'a pas de sous-suite presque échangeable après tout changement de densité, par un critère de [3]. Cette suite ne vérifie donc pas les deux conditions naturelles sur les espaces L^q, assurant l'existence d'une sous-suite presque symétrique. On ne sait pas si cette suite a une sous-suite presque symétrique.

Notons que l'on connaissait déjà (cf. [3]) l'existence de suites bornées de L^q, $1\leqq q<+\infty$, sous-suite presque échangeables après tout changement de densité. On peut également rapprocher ces résultats de ceux de [5] et [6].

Après des rappels sur les espaces stables et sur les représentations des types sur les espaces L^r, $1\leqq r<2$, pour $1\leqq q<p<2$, on construit dans la partie I un type σ sur $L^q([0,1])$ dont la 1-classe conique n'est pas relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $L^q([0,1])$. Dans la partie II, on montre que toute suite q-équi-intégrable $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définissant σ dans L^q est équivalente à la base canonique de l^p et n'a aucune sous-suite presque échangeable après tout changement de densité sur $[0,1]$.

Je remercie B. Maurey et Y. Raynaud pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur ce sujet et le refere de cet article qui m'a suggéré des simplifications et une meilleure présentation de ces résultats.

Rappels, définitions et notations

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *symétrique* si pour tous réels $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ et toute permutation π sur $\{1,\dots,k\}$ on a:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_{\pi(i)}\right\|.$$

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite *presque symétrique* si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier n tel que pour tous réels $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ et toute permutation π sur $\{1,\dots,k\}$, on a:

$$(1-\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_{n+i}\right\| \leqq \left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_{n+\pi(i)}\right\| \leqq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_{n+i}\right\|.$$

Soit (Ω,P) un espace de probabilité, φ une densité sur Ω et $q\in[1,+\infty[$.

Par analogie avec les définitions de [3], on dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $L^q(\Omega,dP)$ est *presque échangeable après le changement de densité* φ s'il existe une suite échangeable $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^q(\Omega,\varphi dP)$ telle que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left\|\frac{X_n}{\varphi^{1/q}}-Z_n\right\|_{L^q(\varphi dP)}<+\infty.$$

Remarquons que si une suite de L^q est presque échangeable après le changement de densité φ, elle est presque symétrique dans L^q.

Dans toute cette étude, on utilise d'une façon essentielle le fait que les espaces $L^r(\Omega,dP)$, $1\leqq r<+\infty$, sont stables. Toutes les définitions et propriétés fondamentales des espaces stables figurent dans [13]. Les propriétés liées à la stabilité des espaces L^r figurent dans [7]. Nous rappelons les résultats de [13] et [7], essentiels pour cette étude.

Un type sur $L^r(\Omega,dP)$ est une fonction τ de $L^r(\Omega,dP)$ dans $\mathbf{R}^+$ telle qu'il existe une suite bornée $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $L^r(\Omega,dP)$ vérifiant:

$$\forall X\in L^r(\Omega,dP),\qquad \tau(X)=\lim_{n\to+\infty}\|X+Y_n\|_r.$$

On dit que τ est *symétrique* si:

$$\forall X \in L^r(\Omega, dP), \qquad \tau(X) = \tau(-X).$$

Tout type symétrique sur $L^r(\Omega, dP)$ peut être représenté (cf. [7]) par une fonction $U^\tau(\omega, t)$ appartenant à

$$L^1(\Omega \times [0, +\infty[, dP \otimes dt/t^{r+1}) \cap L^\infty(\Omega + [0, +\infty[, dP \otimes dt/t^{r+1})$$

vérifiant:

$$\forall X \in L^r(\Omega, dP) \qquad K_r(\tau(X)^r - \|\tau\|_r^r - \|X\|_r^r) = -\langle U^\tau, U^X \rangle$$

où

$$\|\tau\|_r = \tau(0), \quad U^X(\omega, t) = (1 - \cos tX(\omega)), \quad K_r = \int_0^{+\infty} (1 - \cos u) \frac{du}{u^{r+1}}$$

et $\langle \ , \ \rangle$ représente le produit scalaire dans $L^2(\Omega \times [0, +\infty[, dP \otimes dt/t^{r+1})$.

On remarque qu'un type symétrique τ sur $L^r(\Omega, dP)$ est caractérisé par $\|\tau\|_r$ et U^τ.

De plus, $1 - U^\tau$ représente la transformée de Fourier de la mesure aléatoire représentant le type τ au sens de [15].

Le produit de convolution de deux types τ_1 et τ_2 sur $L^r(\Omega, dP)$ définis par:

$$\forall X \in L^r(\Omega, dP), \qquad \tau_1(X) = \lim_n \|X + Y_n^1\|_r$$

$$\tau_2(X) = \lim_n \|X + Y_n^2\|_r$$

est défini par:

$$\forall X \in L^r(\Omega, dP), \qquad \tau_1 * \tau_2(X) = \lim_n \lim_m \|X + Y_n^1 + Y_m^2\|_r.$$

Le produit $\lambda\tau$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ est défini par:

$$\forall X \in L^r(\Omega, dP), \qquad \lambda\tau(X) = \lim_n \|X + \lambda Y_n\|_r.$$

Avec ces notations, on a, si τ_1 et τ_2 sont symétriques:

$$\begin{cases} 1 - U^{\tau_1 * \tau_2} = (1 - U^{\tau_1})(1 - U^{\tau_2}), \\ U^{\lambda\tau}(\omega, t) = U^\tau(\omega, \lambda t). \end{cases}$$

Enfin soit $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de types normalisés symétriques sur $L^r(\Omega, dP)$. Alors $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement* sur $L^r(\Omega, dP)$ [*resp. uniformément sur les bornés de* $L^r(\Omega, dP)$] si et seulement si la suite $(U^{\tau_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement [resp. en norme] dans $L^2([0,1]\times[0,+\infty[, dP\otimes dt/t^{r+1})$ vers U^τ.

La classe conique $K(\tau)$ engendrée par τ est le sous-ensemble de l'ensemble des types sur $L^r(\Omega, dP)$ défini par:

$$K(\tau)=\{\alpha_1\tau * \cdots * \alpha_n\tau \mid n\in\mathbf{N}, (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^n\}.$$

La 1-*classe conique* $K_1(\tau)$ engendrée par τ est définie par

$$K_1(\tau)=K(\tau)\cap\{\tau \mid \|\tau\|_r\leqq 1\}.$$

D'après [8] et [9], il est facile de voir que si $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit un type symétrique τ sur $L^r(\Omega, dP)$, $1\leqq r<+\infty$, alors quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $L^r(\Omega, dP)$ donc est inconditionnelle si $r\neq 1$.

On notera $L^r=L^r([0,1], P)$ où P est la mesure de Lebègue et

$$L^s([0,1]\times[0,+\infty[, dP\otimes dt/t^{r+1})=L^s(dP\otimes dt/t^{r+1}) \quad \text{pour } 1\leqq r,\ s<+\infty.$$

I. Construction et propriétés du type σ

Soient $p\in\,]1,2[$, $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a. indépendantes sur $[0,1]$ prenant les valeurs 1 et 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On pose:

$$\forall q\in[1,2[\qquad K_q=\int_0^\infty (1-\cos u)\frac{du}{u^{q+1}}.$$

Soient ε et N deux réels positifs tels que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[e^{-K_p(1-\varepsilon)}-e^{-2K_p(1-\varepsilon)}]>1-e^{-2\varepsilon K_p}, \\ N^p\in\mathbf{N} \quad \text{et} \quad \displaystyle\int_{1/N}^{N}(1-\cos u)\frac{du}{u^{p+1}}=(1-\varepsilon)K_p. \end{cases}$$

On suppose de plus que la tribu engendrée par la suite $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$ est la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit $\chi(\omega,u)$ une fornction définie sur $[0,1]\times[0,+\infty[$ par:

$$\begin{aligned} \chi(\omega,u)&=1 && \text{si } u\in[0,1/N], \\ &=\xi_k(\omega) && \text{si } u\in[N^{2k-1},N^{2k+1}] \quad \text{pour } k\in\mathbf{N}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on emploiera les notations suivantes:

$$\forall \omega \in [0,1] \qquad \xi_{-1}(\omega)=1,$$

$$\forall t \in [0,+\infty[\qquad \begin{cases} f_{-1}(t)=\displaystyle\int_0^{1/N}(1-\cos tu)\frac{du}{u^{p+1}}, \\ f_k(t)=\displaystyle\int_{N^{2k-1}}^{N^{2k+1}}(1-\cos tu)\frac{du}{u^{p+1}} \qquad \text{pour } k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

DÉFINITION I.1. Pour tout $(\omega,t)\in[0,1]\times[0,+\infty[$ on pose:

$$U(\omega,t)=1-\exp\left(-\int_0^{+\infty}(1-\cos tu)\chi(\omega,u)\frac{du}{u^{p+1}}\right),$$

$$=1-\exp\left(-\sum_{k=-1}^{+\infty}f_k(t)\xi_k(\omega)\right).$$

LEMME I.1. *La fonction U ainsi definie vérifie les propriétés suivantes*:

(i) *La fonction* $t\to U(\omega,t)$, *définie sur* $[0,+\infty[$ *est paire, continue et telle que* $U(\omega,0)=0$.

(ii) *La fonction* $t\to 1-U(\omega,|t|)$ *est de type positif sur* $\mathbf{R}$ *ou sens de* [14].

(iii) $\forall(\omega,t)\in[0,1]\times[0,+\infty[$,

$$1-e^{-K_pt^p}\leqq U(\omega,t)\leqq 1-e^{-2K_pt^p}.$$

(iv) $U\in L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})\cap L^\infty(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ *pour tout* q *tel que* $1\leqq q<p$.

On rappelle qu'une fonction réelle φ est de *type positif* au sens de [14] si pour tous réels $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ et $(t_1,\ldots,t_n)$ on a:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i\lambda_j\varphi(t_i-t_j)\geqq 0.$$

DÉMONSTRATION. Les assertions (i), (ii) et (iii) sont immédiates. Pour démontrer (iv) il suffit de montrer que $1-e^{-t^p}$ appartient à $L^1([0,+\infty[,dt/t^{q+1})$ ce qui est immédiat.

PROPOSITION I.2. *Soit* $1\leqq q<p<2$. *Il existe un type symétrique* τ *sur* L^q *tel que* $U^\tau(\omega,t)=U(\omega,t)$ *pp.*

Ce résultat est une conséquence d'un lemma d'ordre général sur l'espace des types sur L^q, $1\leqq q<p$ qui figure déjà en grande partie dans des résultats non publiés de Y. Raynaud:

LEMME I.2.1. *Soit* $f(\omega,t)$ *une fonction définie sur* $[0,1]\times[0,+\infty[$ *telle que*:

(i) *la fonction* $t\mapsto f(\omega,t)$, *définie sur* $[0,+\infty[$ *soit, pour tout* $\omega\in[0,1]$, *paire continue, de type positif au sens de* [14] *et vérifie* $f(\omega,0)=1$.

(ii) $\exists q \in [1,2]$ *tel que* $(1-f) \in L^1(dP(\omega) \otimes dt/t^{q+1})$.
Alors la fonction $U(\omega,t)=1-f(\omega,t)$ *représente un type symétrique* τ *sur* L^q.

REMARQUE. Si φ est une fonction de type positif au sens de [14] sur $\mathbf{R}$ et si de plus $\varphi(0)=1$, on vérifie aisément que $0 \leqq |\varphi| \leqq 1$. Les hypothèses du lemme I.2.1 impliquent donc que $|1-f|$ est bornée par 2 sur $[0,1] \times [0,+\infty[$.

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par les intervalles dyadiques de longueur inférieure ou égale à $1/2^n$ sur $[0,1]$ et $E^{\mathcal{B}_n}$ l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_n$. Comme $E^{\mathcal{B}_n}$ est linéaire et positive, la fonction $t \to E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)]$ est encore paire, continue, de type positif et vérifie: $E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,0)]=1$. De plus $1-E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)]$ est positive, bornée par 2 sur $[0,1] \times [0,+\infty[$ et appartient à $L^1(dP(\omega) \otimes dt/t^{q+1})$.

Sur chaque intervalle $I_{k,n}=]k/2^n,(k+1)/2^n[$, $0 \leqq k \leqq 2^n-1$, où $E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)]$ est constante par rapport à ω, il existe d'après [14], une suite de v.a. indépendantes $(Y^m_{k,n})_{m\in\mathbf{N}}$ définies sur $I_{k,n}$ et telles que:

$$E_\omega[e^{itY^m_{k,n}}]=e^{\mathcal{B}_m}[f(\omega,t)]\mathbf{1}_{I_{k,n}} \qquad \text{pour tout } m \in \mathbf{N}.$$

La suite $(Y^m_{k,n})_{m\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^q(I_{k,n})$. En effet:

$$\begin{aligned} K_q \| Y^m_{k,n}\|_q^q &= \int_{I_{k,n}} \int_0^{+\infty} (1-\cos tY^m_{k,n}(\omega))\frac{dt}{t^{q+1}}\,dP(\omega) \\ &= \operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\int_{I_{k,n}} (1-e^{itY^m_{k,n}(\omega)})dP(\omega)\frac{dt}{t^{q+1}} \\ &= \int_0^{+\infty}\int_{I_{k,n}} (1-E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)])dP(\omega)\frac{dt}{t^{q+1}} \\ &\leqq \|1-f\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})}. \end{aligned}$$

De plus la suite $(1-\cos tY^m_{k,n}(\omega))_{m\in\mathbf{N}}$ est équidistribuée et il n'est pas difficile de voir qu'elle converge faiblement dans $L^2(I_{k,n}\times[0,+\infty[,\ dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ vers $(1-E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)])\mathbf{1}_{I_{k,n}}$.

La suite $(Y^m_n)_{m\in\mathbf{N}}$ définie par:

$$Y^m_n=\sum_{k=0}^{2^n-1} Y^m_{k,n}\mathbf{1}_{I_{k,n}} \qquad \text{pour tout } m \in \mathbf{N}$$

est bornée dans $L^q(\|Y^m_n\|_q^q \leqq (1/K_q)\|1-f\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})})$ et la suite $(1-\cos tY^m_n(\omega))_{m\in\mathbf{N}}$ converge faiblement dans $L^2(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ vers $1-E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)]$. D'après les résultats de [7], ceci prouve que la fonction $1-E^{\mathcal{B}_n}[f(\omega,t)]$ définit un type symétrique τ_n sur L^q. Comme $(1-E^{\mathcal{B}_n}f(\omega,t))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $L^2(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ vers $1-f(\omega,t)$, ceci implique que $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$

converge uniformément sur les bornés de L^q vers un type symétrique τ tel que $U^\tau = 1 - f$, ce qui achève la démonstration du lemme I.2.1. En appliquant le lemme I.2.1 à $f = 1 - U$, ce qui est possible grâce à la proposition I.1, ceci prouve la proposition I.2.

REMARQUE. Un type τ sur L^q n'est pas entièrement déterminé par la donnée de la fonction U^τ. Cependant, parmi les types τ' tel que $U^{\tau'} = U^\tau$, l'un d'entre eux joue un rôle particulier:

DÉFINITION I.2. Soit $q \in [1,2[$. On dira qu'un type τ sur L^q est *q-équi-intégrable* s'il existe une suite bornée $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans L^q définissant τ et telle que $(|Y_n|^q)_{n\in\mathbf{N}}$ soit équi-intégrable.

LEMME I.2.2. *Soit $f(\omega, t)$ une fonction vérifiant les hypothèses du lemme* I.2.1. *Il existe un type q-intégrable τ_0 tel que $U^{\tau_0} = 1 - f$.*

De plus, τ_0 est caractérisé par $U^{\tau_0} = 1 - f$ et

$$K_q \|\tau_0\|_q^q = \|1 - f\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})} \quad où \quad K_q = \int_0^{+\infty} (1 - \cos u)\frac{du}{u^{q+1}}.$$

DÉMONSTRATION. Soit τ un type sur L^q tel que $U^\tau = 1 - f$ (dont l'existence est assurée par le lemme I.2.1) et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans L^q définisant ce type. Par une technique standard, quitte à passer à une sous-suite, on peut décomposer Y_n en $Y'_n + Y''_n$ où $(|Y'_n|^q)_{n\in\mathbf{N}}$ est équi-intégrable et $(Y''_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite "pics", c'est-à-dire telle que $P(\text{Supp } Y''_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0:

Pour $\varepsilon > 0$ donné on pose:

$$\begin{cases} \delta_n(\varepsilon) = \operatorname{Sup}\left\{\int_A |Y_n|^q dP,\ P(A) \leqq \varepsilon\right\}, \\ \delta(\varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Sup} \delta_n(\varepsilon). \end{cases}$$

Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels positifs tels que $(\delta(\varepsilon_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $\delta = \operatorname{Inf}\{\delta(\varepsilon), \varepsilon > 0\}$. On peut trouver une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $(\delta_{n_k}(\varepsilon_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers δ et donc une suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de parties de $\mathcal{B}$ telle que $(P(A_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 et $(\int_{A_k} |Y_{n_k}|^q dP)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers δ. On pose alors $Y'_k = Y_{n_k}\mathbf{1}_{A_k^c}$ et $Y''_k = Y_{n_k}\mathbf{1}_{A_k}$. On vérifie aisément que $(|Y'_k|^q)_{k\in\mathbf{N}}$ est équi-intégrable. De plus on a, pour $X \in L^q$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|X + Y_n\|_q^q = \lim_{n\to+\infty} \|X + Y'_n\|_q^q + \lim_{n\to+\infty} \|Y''_n\|_q^q.$$

Donc si τ_0 est le type défini par $(Y'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur L^q, τ_0 est défini par:

$$\begin{cases} U^{\tau_0} = U^\tau, \\ \|\tau\|_q^q = \|\tau_0\|_q^q + \lim_{n\to+\infty} \|Y''_n\|_q^q. \end{cases}$$

Ceci prouve la première partie du lemme I.2.2. La démonstration de la seconde partie du lemme I.2.2 m'a été indiquée par Y. Raynaud: supposons que $(|Y_n|^q)_{n\in\mathbf{N}}$ est équi-intégrable et que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit le type τ sur L^q.

Comme $U^{Y_n}(t,\omega)=1-\cos tY_n(\omega)$, on a toujours

$$\|U^{Y_n}\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})}=\int_0^1\int_0^{+\infty}(1-\cos tY_n(\omega))\frac{dt}{t^{q+1}}\,dP(\omega)=K_q\,\|Y_n\|_q^q$$

(cf. [7]). Quand $n\to+\infty$, $\|Y_n\|_q^q$ tend vers $\|\tau\|_q^q$. De plus comme

$$U^{Y_n}(\omega,t)\geqq 0,\qquad \|U^{Y_n}\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})}=\langle U^{Y_n},1\rangle.$$

Pour montrer l'égalité

$$K_q\,\|\tau\|_q^q=\|U^\tau\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})}$$

sachant que $(U^{Y_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement dans $L^2(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ vers U^τ, il suffit de montrer que la suite $(U^{Y_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est faiblement de Cauchy dans $L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$.

Soit $\varepsilon>0$ donné. Comme $(|Y_n|^q)_{n\in\mathbf{N}}$ est équi-intégrable, il existe une suite $(Y'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et une constante $M>0$ telle que:

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad \|Y'_n\|_\infty\leqq M\quad\text{et}\quad \|Y_n-Y'_n\|_q\leqq\varepsilon.$$

Or on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\|U^{Y_n}-U^{Y'_n}\|_{L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})}&=\int_0^1\int_0^{+\infty}|\cos tY_n-\cos tY'_n|\frac{dt}{t^{q+1}}\,dP(\omega)\\
&\leqq 2\int_0^1\int_0^{+\infty}\sin t\left|\frac{Y_n-Y'_n}{2}\right|\sin t\left|\frac{Y_n+Y'_n}{2}\right|\frac{dt}{t^{q+1}}\,dP(\omega)\\
&\leqq 2\int_0^1\left(\int_0^{+\infty}\sin t\left|\frac{Y_n-Y'_n}{2}\right|^2\frac{dt}{t^{q+1}}\right)^{1/2}\\
&\qquad\times\left(\int_0^{+\infty}\sin t\left|\frac{Y_n+Y'_n}{2}\right|^2\frac{dt}{t^{q+1}}\right)^{1/2}dP(\omega)\\
&\leqq 2Cq\int_0^1\left|\frac{Y_n-Y'_n}{2}\right|^{1/2}\left|\frac{Y_n+Y'_n}{2}\right|^{q/2}dP(\omega)\\
&\leqq 2Cq\left\|\frac{Y_n-Y'_n}{2}\right\|_q^{q/2}\left\|\frac{Y_n+Y'_n}{2}\right\|_q^{q/2}\\
&\leqq 2Cq\varepsilon^{q/2}M^{q/2}
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$Cq = \int_0^{+\infty} (\sin t)^2 \frac{dt}{t^{q+1}} .$$

Ce calcul prouve immédiatement qu'il suffit de montrer que la suite $(U^{Y_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est faiblement de Cauchy dans $L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ lorsque $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément bornée dans L^∞. Supposons donc $\| Y_n \|_\infty \leqq M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $A > 0$ on peut écrire:

$$\begin{cases} 0 \leqq \displaystyle\int_0^1 \int_0^{1/A} (1-\cos tY_n) \frac{dt}{t^{q+1}}\, dP(\omega) \leqq \frac{M^2}{2} \int_0^{1/A} t^2 \frac{dt}{t^{q+1}} , \\ 0 \leqq \displaystyle\int_0^1 \int_A^{+\infty} (1-\cos tY_n) \frac{dt}{t^{q+1}}\, dP(\omega) \leqq 2 \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^{q+1}} . \end{cases}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $A > 0$ tel que les U^{Y_n}, $n \in \mathbf{N}$ prennent toute leur masse à ε près sur $[0,1]\times[1/A, A]$ qui est un espace de mesure finie. D'autre part les U^{Y_n} pour $n \in \mathbf{N}$ sont équi-intégrables sur $[0,1]\times[1/A, A]$. En effet, pour tout $B_1 \times B_2$ boréliens de $[0,1]\times[1/A, A]$ on peut écrire

$$\int_{B_1} \int_{B_2} (1-\cos tY_n) \frac{dt}{t^{q+1}}\, dP(\omega) \leqq \frac{M^2}{2} P(B_1) \int_{B_2} t^2 \frac{dt}{t^{q+1}} .$$

Ceci prouve donc que la suite $(U^{Y_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est faiblement de Cauchy dans $L^1(dP(\omega)\otimes dt/t^{q+1})$ et conclut le lemme I.2.2.

Définition I.3. Dans toute la suite, pour q fixé dans l'intervalle $[1, p[$, on désignera par σ le type q-équi-intégrable sur L^q tel que $U^\sigma = U$ (cf. définition I.1) et par

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans L^q définissant σ,
telle que la suite $(|X_n|^q)_{n\in\mathbf{N}}$ soit équi-intégrable.

Remarque. On peut montrer sans difficultées que si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie comme ci-dessus pour un certain $q \in [1, p]$, cette même suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit aussi le type q'-équi-intégrable σ sur L^q pour tout $q' \in [1, q]$ tel que $U^\sigma = U$.

La proposition suivante est fondamentale: en effet on sait d'après [7] que si la 1-classe conique engendrée par σ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^q, alors $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite presque symétrique.

Proposition I.3. *Soit $q \in [1, p[$. La 1-classe conique engendrée par σ (Définition I.3) n'est pas relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^q.*

DÉMONSTRATION. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose:

$$\sigma_n = \mathop{*}_{i=1}^{n} \frac{\sigma}{n^{1/p}}\,.$$

On va montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite dont aucune sous suite ne converge pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^q. Pour cela, il suffit de montrer d'après [7], que la suite $(U^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite dont aucune sous-suite ne converge presque partout sur $[0,1]\times[0,+\infty[$.

Comme

$$U^{\sigma}(\omega,t) = 1 - \exp\left[-t^p\int_0^{+\infty}(1-\cos u)\chi\left(\omega,\frac{u}{t}\right)\frac{du}{u^{p+1}}\right],$$

on a:

$$\begin{aligned}1 - U^{\sigma_n}(\omega,t) &= [1 - U^{\sigma}(\omega, t/n^{1/p})]^n\\ &= \exp\left[-t^p\int_0^{+\infty}(1-\cos u)\chi\left(\omega,\frac{un^{1/p}}{t}\right)\frac{du}{u^{p+1}}\right]\\ &= \exp\left[-\int_0^{+\infty}(1-\cos tu)\chi(\omega, un^{1/p})\frac{du}{u^{p+1}}\right].\end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{cases} n_k = (N^p)^k, \\ F_n(\omega) = \exp\left[-\int_{1/N}^{N}(1-\cos u)\chi[\omega, un^{1/p}]\dfrac{du}{u^{p+1}}\right].\end{cases}$$

Alors

$$F_{n_k}(\omega) = \exp\left[-\xi_k(\omega)\int_{1/N}^{N}(1-\cos u)\frac{du}{u^{p+1}}\right] = \exp[-\xi_k(\omega)K_p(1-\varepsilon)].$$

La suite $(F_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de v.a. indépendants telle que

$$P[F_{n_k} = e^{-K_p(1-\varepsilon)}] = P[F_{n_k} = e^{-2K_p(1-\varepsilon)}] = \tfrac{1}{2}$$

et n'a donc aucune sous suite convergente p.p.

Pour démontrer la proposition I.3, il suffit donc de montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que la suite $(1 - U^{\sigma_{n_k}}(\omega,t))_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie:

$$\forall(\omega,t)\in[0,1]\times]1-\eta,1+\eta[,\ |1 - U^{\sigma_{n_k}}(\omega,t) - F_{n_k}(\omega)| < \tfrac{1}{2}[e^{-K_p(1-\varepsilon)} - e^{-2K_p(1-\varepsilon)}].$$

Or on a:

$$|1 - U^{\sigma_{n_k}}(\omega,t) - F_{n_k}(\omega)| \leqq |U^{\sigma_{n_k}}(\omega,t) - U^{\sigma_{n_k}}(\omega,1)| + |1 - U^{\sigma_{n_k}}(\omega,1) - F_{n_k}(\omega)|.$$

Par définition de N, on a:

$$\forall \omega [0,1] \qquad |1-U^{\sigma_{n_k}}(\omega,1)-F_{n_k}(\omega)| \leqq 1-e^{-2\varepsilon K_p}.$$

D'autre part on peut écrire, pour $|t-1|<\eta$:

$$\begin{aligned}
&| U^{\sigma_{n_k}}(\omega,t)-U^{\sigma_{n_k}}(\omega,1)| \\
&\quad = \left| \exp\left[-\int_0^{+\infty} (1-\cos tu)\chi(\omega, un_k^{1/p}) \frac{du}{u^{p+1}}\right] \right. \\
&\qquad \left. -\exp\left[-\int_0^{+\infty} (1-\cos u)\chi(\omega, un_k^{1/p}) \frac{du}{u^{p+1}}\right] \right| \\
&\quad \leqq 2\int_0^{+\infty} |\cos tu - \cos u| \frac{du}{u^{p+1}} \\
&\quad \leqq 4\int_0^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{t-1}{2}\right)u\right| \left|\sin\frac{t+1}{2}u\right| \frac{du}{u^{p+1}} \\
&\quad \leqq 4\left(\int_0^{+\infty}\left(\sin\frac{t-1}{2}u\right)^2 \frac{du}{u^{p+1}}\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}\left(\sin\frac{t+1}{2}u\right)^2 \frac{du}{u^{p+1}}\right)^{1/2} \\
&\quad \leqq 4C_p \left|\frac{t-1}{2}\right|^{p/2}\left|\frac{t+1}{2}\right|^{p/2} \\
&\quad \leqq 4C_p \left(\frac{\eta}{2}\right)^{p/2}\left(\frac{\eta+2}{2}\right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Donc pour montrer l'existence de η, il suffit de voir que:

$$\tfrac{1}{2}[e^{-\varepsilon K_p(1-\varepsilon)} - e^{-2\varepsilon K_p(1-\varepsilon)}] > 1-e^{-2\varepsilon K_p}$$

et ceci est vrai par hypothèse sur ε.

Ceci achève la démonstration de la proposition I.3.

II. Construction d'une suite équivalente à la base canonique de l^p dans L^q $1 \leqq q < p < 2$ sans sous-suite presque échangeable après tout changement de densité

DÉFINITION II.1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie en I.3. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on définit la fonction γ_n par:

$$\forall X \in L^q, \qquad \gamma_n(X)^q = \frac{\|X+X_n\|_q^q + \|X-X_n\|_q^q + 2\|X\|_q^q}{4}.$$

PROPOSITION II.1. *Pour tout $n\in\mathbf{N}$, γ_n est un type positif sur L^q et la suite*

$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers le type* σ', *q-équi-intégrable sur* L^q *tel que*

$$U^{\sigma'}=\tfrac{1}{2}U^{\sigma}=\tfrac{1}{2}U \quad \textit{et} \quad \|\sigma'\|_q^q=\tfrac{1}{2}\|\sigma\|_q^q.$$

On rappelle qu'un type γ sur L^q est positif au sens de [10] si γ est symétrique et si de plus $1-U^{\gamma}\geqq 0$ p.p. Il est évident que σ est un type positif sur L^q. Par suite σ' est aussi un type positif sur L^q.

Démonstration. Pour $n\in\mathbf{N}$ fixé, la fonction

$$t\to\cos t\frac{X_n(\omega)}{2}$$

vérifie les hypothèses du lemme I.2.1. Il existe donc un type symétrique β_n sur L^q tel que

$$U^{\beta_n}(\omega,t)=1-\cos t\frac{X_n(\omega)}{2}.$$

On vérifie que:

$$\forall X\in L^q,\qquad \beta_n(X)^q=\frac{\|X+X_n/2\|_q^q+\|X-X_n/2\|_q^q}{2}.$$

Posons: $\gamma_n=\beta_n*\beta_n$. On a bien:

$$\forall X\in L^q,\qquad \gamma_n(X)^q=\frac{\|X+X_n\|_q^q+\|X-X_n\|_q^q+2\|X\|_q^q}{4}$$

et de plus

$$(1-U^{\gamma_n})=(1-U^{\beta_n})^2\geqq 0.$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\gamma_n(X)^q&=\tfrac{1}{4}[\sigma(X)^q+\sigma(-X)^q+2\|X\|_q^q]\\&=\|X\|_q^q+\tfrac{1}{2}\|\sigma\|_q^q-1/K_q\langle U^{\sigma}/2,U^X\rangle.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un type σ' tel que $U^{\sigma'}=\tfrac{1}{2}U^{\sigma}$ et $\|\sigma'\|_q^q=\tfrac{1}{2}\|\sigma\|_q^q$. Evidemment, σ' est un type symétrique, positif et q-équi-intégrable.

Définition II.2. On appelle τ et τ' les types positifs, q-équi-intégrables sur L^q définis par:

$$U^{\tau}(\omega,t)=(1-e^{-2K_pt^p})\quad\text{et}\quad U^{\tau'}(\omega,t)=\tfrac{1}{2}(1-e^{-K_pt^p})$$

(leur existence est assuré par le lemme I.2.1).

Avant d'étudier la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans L^q, on donne des propriétés du type σ':

PROPOSITION II.2. *Pour tout type positif ρ sur L^q et tous réels α et β, on a*:

$$\|(|\alpha|^p+|\beta|^p)^{1/p}\tau' * \rho\|_q \leqq \|\alpha\sigma' * \beta\sigma' * \rho\|_q \leqq \|(|\alpha|^p+|\beta|^p)^{1/p}\tau * \rho\|_q.$$

DÉMONSTRATION. Comme il est évident que tout convolué et multiple de types positifs, q-équi-intégrables est encore positif et q-équi-intégrable, d'après le lemme I.2.2 pour montrer la propositon II.2 il suffit de montrer, les inégalités:

$$(*)\qquad \begin{cases} \forall \rho \text{ type positif sur } L^q,\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2, \\ U^{(|\alpha|^p+|\beta|^p)^{1/p}\tau' * \rho} \leqq U^{\alpha\sigma' * \beta\sigma' * \rho} \leqq U^{(|\alpha|^p+|\beta|^p)^{1/p}\tau * \rho}. \end{cases}$$

Or par construction de la fonction U (Définition I.1) on a:

$$1-e^{-K_pt^p} \leqq U^\sigma(\omega,t)=U(\omega,t)\leqq 1-e^{-2K_pt^p}.$$

On en déduit:

$$U^{\tau'} \leqq U^{\sigma'} \leqq U^{\tau}.$$

Montrons par exemple l'inégalité de gauche de $(*)$:

$$\begin{aligned} 1-U^{\alpha\sigma' * \beta\sigma' * \rho} &= (1-U^{\alpha\sigma'})(1-U^{\beta\sigma'})(1-U^\rho) \\ &\leqq \tfrac14(1+e^{-K_p|\alpha|^pt^p})(1+e^{-K_p|\beta|^pt^p})(1-U^\rho) \\ &\leqq \tfrac12(1+e^{-K_p(|\alpha|^p+|\beta|^p)t^p})(1-U^\rho) \\ &= (1-U^{((|\alpha|^p+|\beta|^p)\tau')})(1-U^\rho) \\ &= 1-U^{(|\alpha|^p+|\beta|^p)^{1/p}\tau' * \rho}. \end{aligned}$$

L'autre inégalité s'obtient de la même manière et ceci prouve bien $(*)$.

THÉORÈME II.1. *Soit $1\leqq q<p<2$.*
La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie en I.3 a une sous-suite équivalente à la base canonique de l^p dans $L^q([0,1],dP)$.

DÉMONSTRATION. Pour $q\in[1,2[$ fixé et en gardant les notations précédentes, on va en fait démontrer qu'il existe des constantes A_1 et A_2 et une sous-suite $(\gamma_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que: $\forall k\in\mathbf{N}$, $\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbf{R}^k$,

$$(**)\qquad A_1\left(\sum_{i=1}^k|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left\|\mathop{*}_{i=1}^{k}\alpha_i\gamma_{n_i}\right\|_q \leqq A_2\left(\sum_{i=1}^k|\alpha_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ceci prouve le théorème II.1: en effet soient $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(\delta_i)_{i\in\mathbf{N}}$ des suites de v.a. indépendantes telles que

$$P(\varepsilon_i = +1) = P(\varepsilon_i = -1) = P(\delta_i = +1) = P(\delta_i = 0) = \tfrac{1}{2}.$$

On peut écrire

$$\left\| \mathop{*}_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_{n_i} \right\|_q^q = \int_{[0,1]^3} \left| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_i(\omega_1)\delta_i(\omega_2) X_{n_i}(\omega_3) \right|^q dP(\omega_1)dP(\omega_2)dP(\omega_3).$$

Donc si la suite $(X_{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$ est inconditionnelle, elle est bien équivalente à la base canonique de l^p. Or si $q>1$, comme $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer qu'elle est inconditionnelle. Si $q=1$, on va montrer par une technique de troncature que c'est le cas également: $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant équi-intégrable, pour tout $k\in\mathbf{N}$, il existe $M_k>0$ tel que si l'on définit $X_n^{M_k}$ par:

$$\begin{aligned} X_n^{M_k} &= X_n && \text{si } |X_n| \leqq M_k \\ &= M_k && \text{si } X_n \geqq M_k \\ &= -M_k && \text{si } X_n \leqq M_k \end{aligned}$$

on ait:

$$\forall n\in\mathbf{N}, \qquad \|X_n - X_n^{M_k}\|_1 \leqq 1/2^k.$$

Soient μ_ω et $\mu_\omega^{M_k}$, les mesures aléatoires définies respectivement par les suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(X_n^{M_k})_{n\in\mathbf{N}}$ au sens de [15]. En appliqunt les résultats de [15], on montre aisément que, si $1<r<p$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|X_n^{M_k}\|_r^r &= \int_{[0,1]} \int_{\mathbf{R}} |x|^r d\mu_\omega^{M_k}(x)dP(\omega) \\ &\leqq \int_{[0,1]} \int_{\mathbf{R}} |x|^r d\mu_\omega(x)dP(\omega). \end{aligned}$$

Or la mesure μ_ω sur $\mathbf{R}$ a pour transformée de Fourier $1-U^\sigma(\omega,t)$. Donc, si l'on note γ_p la mesure p-stable sur $\mathbf{R}$ de transformée de Fourier e^{-2t^p}, en utilisant le fait que (cf. [7]):

$$|x|^r = C_r \int_0^{+\infty} (1-\cos tx)\frac{dt}{t^{r+1}}$$

(C_r est une constante positive) on peut écrire:

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n^{M_k}\|_r^r \leqq C_r \int_{[0,1]} \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbf{R}} (1-\cos tx) d\mu_\omega(t) \right] \frac{dt}{t^{r+1}}\, dP(\omega)$$

$$= C_r \int_{[0,1]} \int_0^{+\infty} U^\sigma(t,\omega) \frac{dt}{t^{r+1}}\, dP(\omega)$$

$$\leqq C_r \int_{[0,1]} \int_0^{+\infty} (1-e^{-2t^p}) \frac{dt}{t^{r+1}}$$

$$= K(p,r) < +\infty.$$

On en déduit qu'il existe $n_k \in \mathbf{N}$ tel que:

$$\|X_{n_k}^{M_k}\|_r^r \leqq K(p,r)+1.$$

La suite $(X_{n_k}^{M_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée dans L^r, donc quitte à changer r en $r' < r$, on peut supposer qu'elle est r-équi-intégrable. Il est facile de voir (en appliquant les résultats de [7]) que cette suite définit un type symétrique σ_r sur L^r tel que $U^{\sigma_r} = U^\sigma$. Par le raisonnement précédent, $(X_{n_k}^{M_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^p dans L^r. Il est classique qu'alors, les normes L^1 et $L^{r'}$ pour $r' < r$ sont équivalentes sur l'espace vectoriel engendré par $(X_{n_k}^{M_k})_{k\in\mathbf{N}}$. La suite $(X_{n_k}^{M_k})_{k\in\mathbf{N}}$ étant inconditionnelle dans $L^{r'}$, elle l'est donc aussi dans L^1 et la condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|X_{n_k} - X_{n_k}^{M_k}\| < +\infty$$

implique que la suite $(X_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est également inconditionnelle dans L^1.

Montrons donc (**): Soit $(A_N)_{N\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$0 < \sum_{N=1}^{\infty} A_N = \tfrac{1}{2}\operatorname{Inf}(\|\tau\|_q^q, \|\tau'\|_q^q)$$

et supposons que $\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}, \ldots, \gamma_{n_{N-1}}$ ont été construits. Soit K_{N-1} le sous-ensemble des types symétriques sur L^q défini par:

$$K_{N-1} = \{\alpha_1\gamma_{n_1} * \cdots * \alpha_{N-1}\gamma_{n_{N-1}} * \lambda\alpha' * \mu\tau * \mu'\tau', (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}, \lambda, \mu, \mu') \in \mathbf{R}^{N+2},$$
$$\operatorname{Sup}(|\alpha_i|, |\lambda|, |\mu|, |\mu'|, 1 \leqq i \leqq N-1) \leqq 1\}.$$

Il est facile de voir que K_{N-1} est compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^q. Comme par ailleurs la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers σ', il existe un entier n_N tel que:

$$\forall \delta \in K_{N-1}, \qquad |\,\|\gamma_{n_N} * \delta\|_q^q - \|\sigma' * \delta\|_q^q\,| \leqq A_N.$$

En appliquant la proposition II.2, on peut alors écrire: $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{R}^N$ tels que $(\sum_{i=1}^N |\alpha_i|^p)^{1/p} \leqq 1$:

$$\begin{aligned}
\left\| \mathop{*}_{i=1}^{N} \alpha_i \gamma_{n_i} \right\|_q^q &\leqq \left\| \alpha_N \sigma' * \mathop{*}_{i=1}^{N-1} \alpha_i \gamma_{n_i} \right\|_q^q + A_N \\
&\leqq \left\| \alpha_N \sigma' * \alpha_{N-1} \sigma' * \mathop{*}_{i=1}^{N-2} \alpha_i \gamma_{n_i} \right\|_q^q + A_N + A_{N-1} \\
&\leqq \left\| (|\alpha_N|^p + |\alpha_{N-1}|^p)^{1/p} \tau * \mathop{*}_{i=1}^{N-2} \alpha_i \gamma_{n_i} \right\|_q^q + A_N + A_{N-1} \\
&\leqq \cdots \leqq \left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^p \right)^{q/p} \left(\|\tau\|_q^q + \sum_{i=1}^{N} A_i \right).
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre aussi:

$$\left\| \mathop{*}_{i=1}^{N} \alpha_i \gamma_{n_i} \right\|_q^q \geqq \left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^p \right)^{q/p} \left(\|\tau'\|_q^q - \sum_{i=1}^{N} A_i \right).$$

Par homogénéité, ces inégalités sont encore vraies pour tout N-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. En réitérant le procédé, on montre ainsi que $(**)$ est vraie avec les constantes

$$A_1 = (\tfrac{1}{2}(\|\tau'\|_q^q))^{1/q} \quad \text{et} \quad A_2 = (\tfrac{3}{2}\|\tau\|_q^q)^{1/q}.$$

THÉORÈME II.2. *Avec les mêmes notations que le théorème* II.1:
$(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *n'a aucune sous-suite presque échangeable après tout changement de densité* φ *sur* $[0, 1]$.

DÉMONSTRATION. On utilise une méthode de [3]: soit φ une densité sur $[0, 1]$. D'après [3], la suite $(X_n / \varphi^{1/q})_{n \in \mathbf{N}}$ définit un type σ_φ dans $L^q([0, 1], \varphi dP)$ tel que:

$$\begin{cases} U^{\sigma_\varphi}(\omega, t) = U^\sigma \left(\omega, \dfrac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}} \right), \\ \|\sigma_\varphi\|_q = \|\sigma\|_q. \end{cases}$$

Soit $\mathscr{A}_\varphi$ la tribu engendrée sur $[0, 1]$ par les fonctions $\omega \to U^{\sigma_\varphi}(\omega, t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

LEMME II.2.1. $\mathscr{A}_\varphi = \mathscr{B}$.

DÉMONSTRATION. Posons

$$W_t(\omega) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}} u \right) \chi(\omega, u) \frac{du}{u^{p+1}}.$$

Par définition de U^{σ_φ}, la tribu $\mathscr{A}_\varphi$ est la tribu sur $[0,1]$ engendrée par les fonctions W_t.

On a:

$$W_t(\omega) = f_{-1}\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(\omega) f_k\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right).$$

Lorsque $t \to +\infty$, on a:

(1)
$$f_{-1}\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right) = \int_0^{1/N}\left(1-\cos\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}u\right)\frac{du}{u^{p+1}}$$
$$= \frac{t^p}{\varphi(\omega)^{p/q}}\int_0^{1/\varphi(\omega)^{1/q}N}(1-\cos u)\frac{du}{u^{p+1}}.$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty} f_{-1}\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right)\times\frac{1}{t^p} = \frac{K_p}{\varphi(\omega)^{p/q}}.$$

(2) Si $k \geqq 0$:

$$f_k\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right) = \int_{N^{2k-1}}^{N^{2k+1}}\left(1-\cos\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}u\right)\frac{du}{u^{p+1}}.$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty} f_k\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right) = \int_{N^{2k-1}}^{N^{2k+1}}\frac{du}{u^{p+1}}$$
$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{N^{(2k-1)p}} - \frac{1}{N^{(2k+1)p}}\right].$$

(3) Si $n \geqq 0$ est fixé:

$$0 \leqq \sum_{k=n}^{+\infty} f_k\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right)\xi_k(\omega) \leqq 2\int_{N^{2n-1}}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}u\right)\frac{du}{u^{p+1}}$$
$$\leqq \frac{4}{p}\,\frac{1}{N^{(2n-1)}}.$$

De ceci l'on déduit:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{W_t(\omega)}{t^p} = \frac{K_p}{\varphi(\omega)^{p/q}}.$$

Donc φ est mesurable par rapport à $\mathscr{A}_\varphi$ et par suite $\Sigma_{k=0}^{+\infty}\xi_k(\omega)f_k(t/\varphi(\omega)^{1/q})$ aussi pour tout $t \in [0, +\infty[$.

Or

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k(\omega)f_k\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right)-\frac{1}{p}\left(N^p-\frac{1}{N^p}\right)\xi_0(\omega)\right|\leqq\frac{4}{p}\,\frac{1}{N^p}.$$

Soient B_1 et B_2 deux boréliens de $\mathbf{R}$ tels que:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{p}\left(N^p-\dfrac{1}{N^p}\right)\in B_1,\\[2ex] \dfrac{2}{p}\left(N^p-\dfrac{1}{N^p}\right)\in B_2,\\[2ex] B_1+\dfrac{4}{p}\cdot\dfrac{1}{N^p}<B_2-\dfrac{4}{p}\,\dfrac{1}{N^p}.\end{cases}$$

En posant

$$F_0(\omega)=\lim_{t\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k(\omega)f_k\left(\frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right),$$

ces inégalités prouvent que:

$$F_0^{-1}(B_1)=\xi_0^{-1}(1)\quad\text{et}\quad F_0^{-1}(B_2)=\xi_0^{-1}(2).$$

Comme F_0 est mesurable par rapport à $\mathscr{A}_\varphi$, ξ_0 l'est donc aussi.

De proche en proche, on montre selon le même principle que toutes les fonctions $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont measurables par rapport à $\mathscr{A}_\varphi$. Ceci implique que $\mathscr{A}_\varphi=\mathscr{B}$ car par définition, les $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ engendrent $\mathscr{B}$.

On peut terminer la démonstration du théorème II.2: si la suite $(X_n/\varphi^{1/q})_{n\in\mathbf{N}}$ était presque échangeable, il existerait une suite échangeable $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$ telle que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{X_n}{\varphi^{1/q}}-Z_n\right\|_{L^q(\varphi dP)}=0.$$

Il est facile de voir que $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit le même type σ que $X_n/\varphi^{1/q}$

Or d'après le théorème de Finetti ([3]), la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est conditionnellement indépendante et équidistribuée par rapport à sa tribu de queue donc aussi par rapport à $\mathscr{A}_\varphi$.

Ceci implique que

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad E^{\mathscr{A}_\varphi}[1-\cos tZ_n]=U^\sigma(\omega,t/\varphi(\omega)^{1/q}).$$

Cette égalité est impossible car comme $\mathscr{A}_\varphi=\mathscr{B}$, elle impliquerait que la fonction

$U^\sigma(\omega, t/\varphi(\omega)^{1/q})$ est de la forme $(1-\cos Z_n(\omega))$ ce qui n'est pas possible. (Par exemple, on peut vérifier que

$$U^\sigma\left(\omega, \frac{t}{\varphi(\omega)^{1/q}}\right) \underset{t\to 0}{\overset{C}{\sim}} \frac{t^p}{\varphi(\omega)^{p/q}}$$

alors que $1-\cos tZ_n(\omega) \underset{t\to 0}{\overset{C}{\sim}} |t|^2 Z_n(\omega)^2$).

Ceci conclut le théorème II.2.

Bibliographie

1. D. J. Aldous, *Subspace of L^1 via random measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 445–463.

2. B. Beauzamy et J. T. Lapresté, *Modèles étalés des espaces de Banach*, Edition Hermann, 1983.

3. I. Berkes and H. P. Rosenthal, *Almost exchangeable sequences of random variables*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **20** (1985), 473–507.

4. A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory **7** (1973), 294–299.

5. D. Dacunha-Castelle, *Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz*, Séminaire Maurey–Schwartz, Ecole Polytechnique, 1974–75, Exposés 10 & 11.

6. D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, *Sous espaces de L^1*, Isr. J. Math. **26** (1977), 320–351.

7. S. Guerre, *Types et suites symétriques dans L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$*, Isr. J. Math. **53** (1986), 191–208.

8. S. Guerre et J. T. Lapresté, *Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B **16** (1980), 339–347.

9. S. Guerre et J. T. Lapresté, *Quelques propriétés des espaces de Banach stables*, Isr. J. Math. **39** (1981), 247–254.

10. S. Guerre et M. Lévy, *Espaces l^p dans les sous-espaces de L^1*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 611–616.

11. W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtmann and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. **19** (1979), n° 217.

12. M. I. Kadec and A. Pelczynski, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces of L_p*, Studia Math. **21** (1962), 161–176.

13. J. L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Isr. J. Math. **39** (1981), 273–295.

14. P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1937.

15. B. Maurey, *Tout sous-espace de L^1 contient un l^p d'après D. Aldous*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Ecole Polytechnique, 1979–80.